МОДУЛЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕКОГО УПРАВЛЕНИЯ

РАЗДЕЛ 1. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Развитие техники автоматического управления связано с проблемой замены человека в различных звеньях управления технологическими процессами.

В настоящее время вопросам автоматизации уделяется исключительно большое внимание, так как необходимость широкой автоматизации – это потребность самой практики.

Сейчас используется несколько терминов для обозначения наук, изучающих вопросы автоматизации, их взаимосвязь представлена на рис. 1.1.

Рис. 1.1

Кибернетика – наука об общих закономерностях процессов управления – основывается на изучении объектов управления, получении информации о протекании процессов в объектах и выработке управляющих воздействии.

Причем объекты управления могут быть самые разные: биологические системы, предприятия, машины и их отдельные системы.

Техническая кибернетика – наука, рассматривающая управление техническими системами. Она включает в себя теорию информации и теорию автоматического управления.

Термины “*управление*” и “*регулирование*” часто используют как синонимы, однако они имеют различие.

Автоматическое регулирование – это поддержание постоянной или изменяющейся по заданному закону некоторой величины, характеризующей процесс, и осуществляется оно путем измерения состояния объекта и воздействия на регулирующий орган объекта.

Автоматическое управление – это воздействие на объект управления с целью достижения заданной цели управления, то есть охватывает более широкий круг задач. Под автоматическим управлением понимается автоматическое осуществление совокупности воздействий, выбранных из множества возможных на основании определенной информации и направленных на обеспечение функционирования объекта в соответствии с целью управления.

То есть задачи управления включают в себя задачи регулирования и, кроме того, вопросы самонастройки систем управления, оптимального управления и другие.

ТАУ – это наука о принципах построения и методах расчета систем автоматического управления. Ее выводы справедливы для различных систем независимо от назначения и физической природы. Применение систем их проектирование и эксплуатация невозможны без знания ТАУ.

1.1. История развития автоматики и ТАУ

Первый автоматический регулятор был изобретен в 1765 г. И.И.Ползуновым (рис. 1.2). Он был предназначен для стабилизации уровня воды в котле паровой машины.

В 1768 г. разработан центробежный регулятор скорости вращения паровой машины Д. Уатта. Основоположник теории автоматического регулирования – И.А. Вышнеградский. В 1876 г. опубликована его работа “Регуляторы прямого действия”, в которой, он впервые получил условия устойчивости систем регулирования.

Большой вклад в развитие теории автоматического управления внесли российские ученые: Н.Е. Жуковский, А. Н. Чебышев, В.И. Столетов.

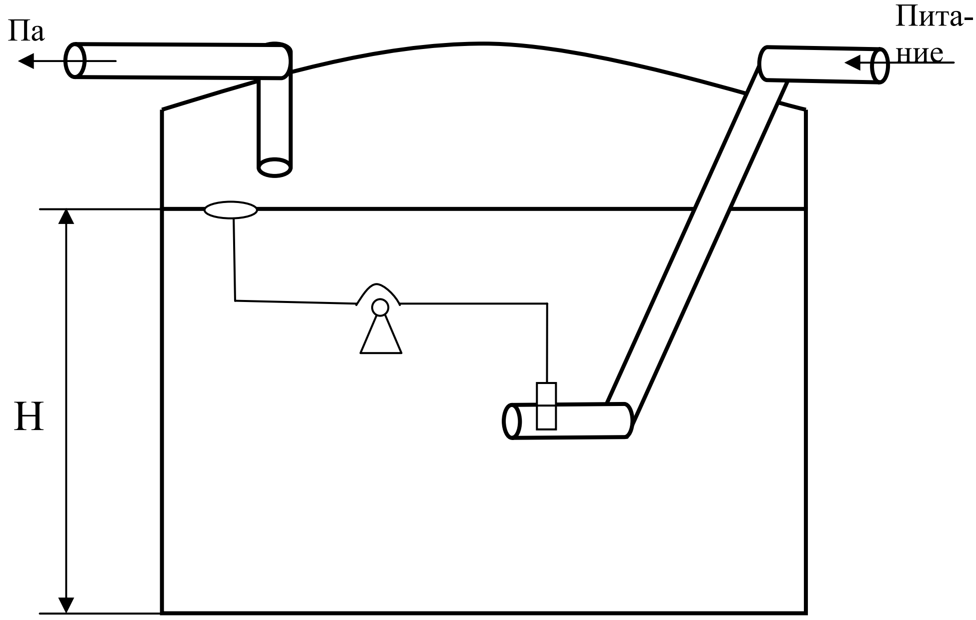

Рис. 1.2

После 1940 г. ТАР выделилась в самостоятельную науку. Были созданы методы расчета динамических систем.

В 50-х годах возникли новые направления:

-теория оптимальных систем;

-теория адаптивных систем.

Большой вклад внесли также советские ученые: Солодовников В.В., Петров Б.Н., Теодорчик К.Ф.. ТАУ развивается и в настоящее время.

1.2. Основные понятия и определения о системе автоматического регулирования

Протекание производственных процессов характеризуется переменными величинами *t, V, P,* которые называются *параметрами* производственных процессов. Чтобы производственные процессы протекали с высоким к.п.д. и заданной производительностью, необходимо параметры поддерживать на заданном уровне или изменять по определенному закону.

Объект регулирования – это установка, где регулируется какой – либо процесс.

Параметр, который поддерживается на определенном уровне или закономерно изменяется – называется *регулируемым.*

Величины, отражающие внешние влияния на объект, называются *воздействиями*. Делятся на *возмущающие* воздействия и *управляющие*, вырабатываемые человеком или управляющим устройством.

Существует понятие *заданного значения* регулируемой величины.

Измеренное значение регулируемой величины в данный момент времени называется *текущим значением* регулируемой величины.

Разность между заданным и текущим значением называется *ошибкой регулирования*.

Автоматический регулятор – устройство, которое на основе ошибки регулирования вычисляет управляющее воздействие.

Устройство, предназначенное для перемещения регулирующего органа, называется *исполнительным механизмом*.

Р*егулирующий орган* – устройство, предназначенное для воздействия непосредственно на параметры объекта.

Устройство для измерения регулируемой величины называется *чувствительным элементом* (термопара).

Системой автоматического регулирования называется замкнутая динамическая система, состоящая из объекта регулирования и автоматического регулятора.

1.3. Классификация САУ

По цели регулирования и характеру задающего воздействия системы могут быть разделены: системы стабилизации; системы программного регулирования; следящие системы.

Системы стабилизации

Их основная особенность в том, что заданное значение регулируемой величины остается долгое время неизменным.

На рис. 1.4 приведена система стабилизации уровня воды в резервуаре, а на рис.1.5 функциональная схема системы, на которой выделены основные элементы системы автоматического управления.

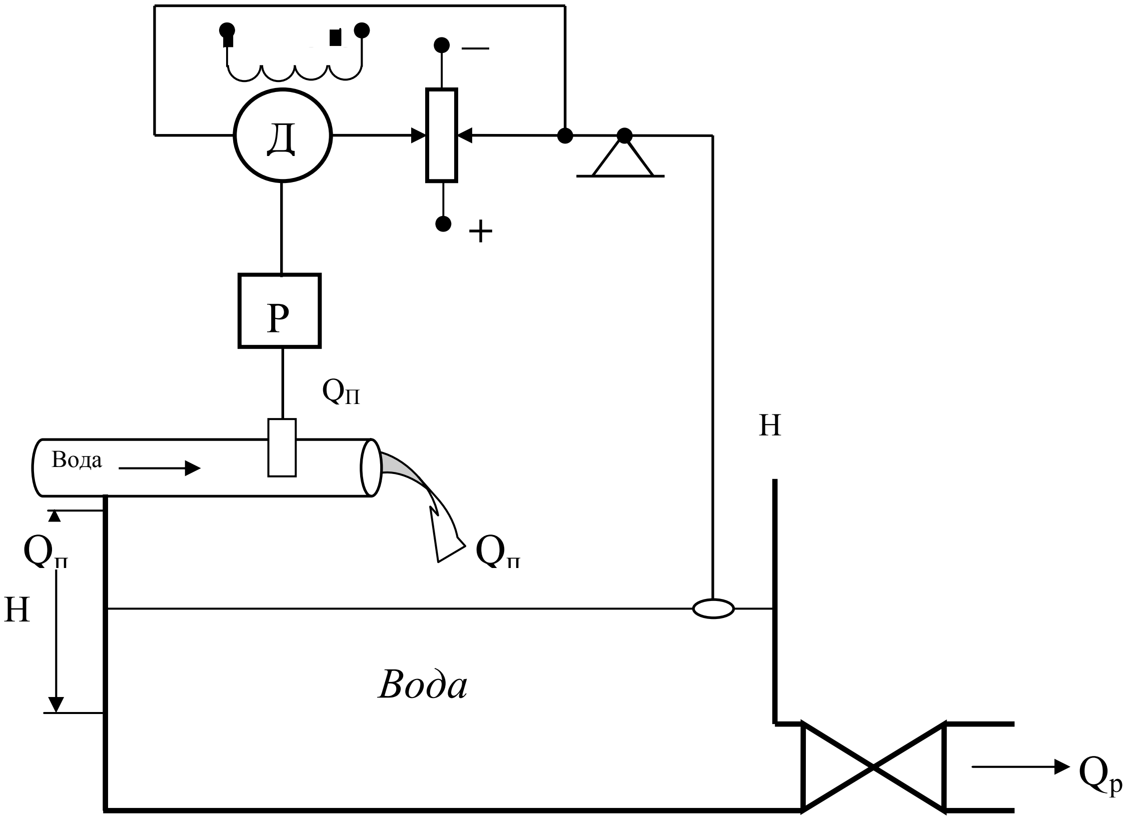

Рис. 1.4

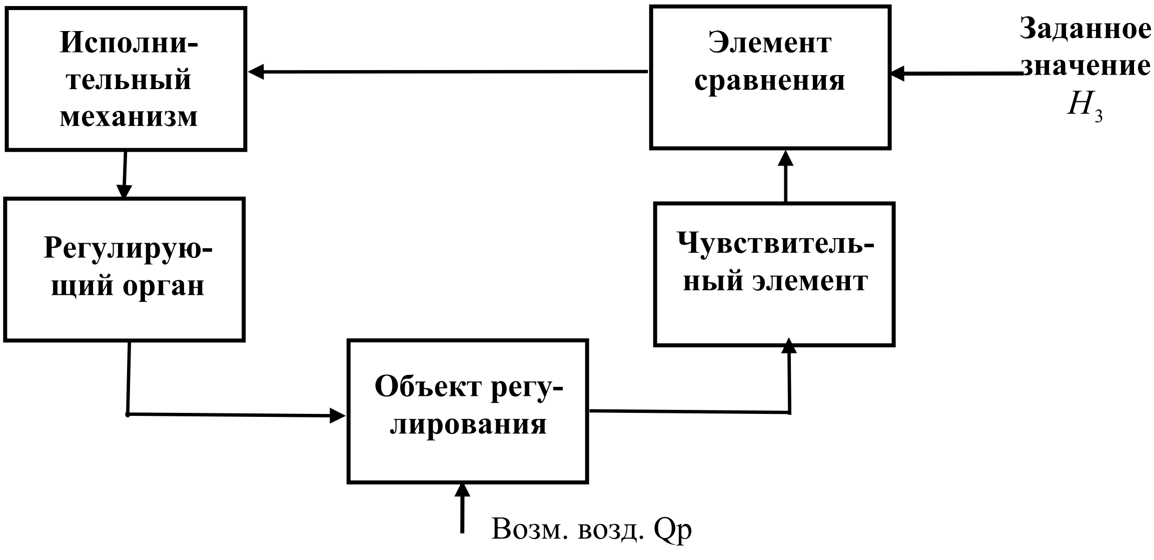

Рис. 1.5

В системах *программного управления* задающее воздействие изменяется по заранее заданному закону (рис. 1.6).

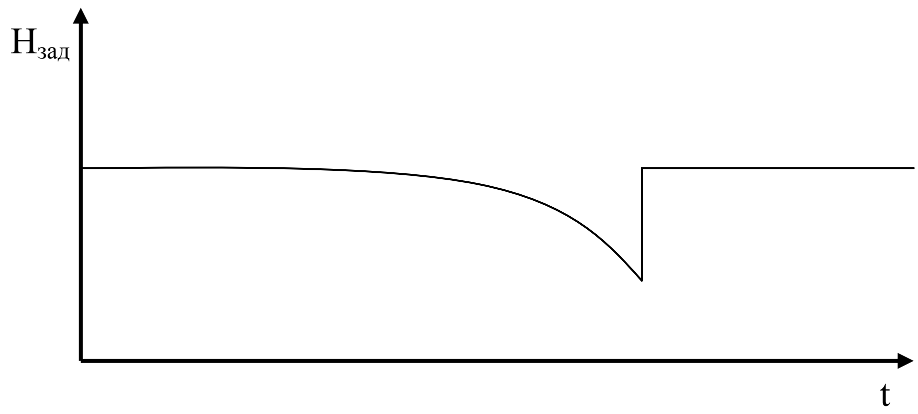

Рис. 1.6

В *следящих* системах задающее воздействие изменяется по неизвестному заранее закону.

1.4. Основные принципы регулирования

Все системы автоматического управления, имеющие различную физическую природу и назначение, построены на основе следующих трех принципов.

Регулирование по отклонению.

Этот принцип регулирования является наиболее важным и широко распространенным. Функциональная схема системы, реализующей этот принцип, имеет вид:

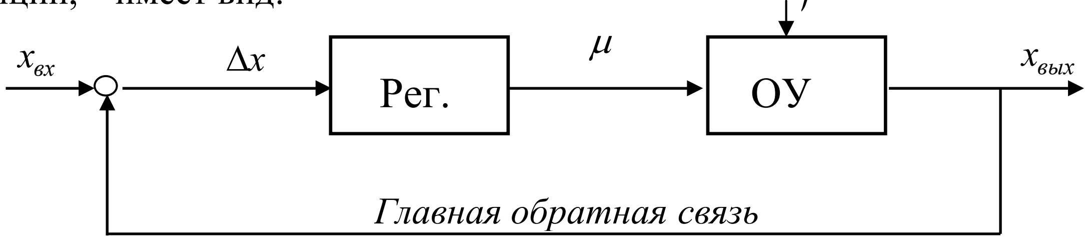

Рис. 1.7

где $\Delta x = x_{вх} - x_{вых}$ – ошибка регулирования или отклонение.

Система содержит регулятор и объект управления и ее главной особенностью является наличие обратной связи.

На объект действует управляющее воздействие μ и возмущающее воздействие f.

Возмущающее воздействие f приводит к отклонению регулируемой величины $x_{вых}$, которая измеряется и поступает на вход системы, где сравнивается с заданным значением и вычисляется ошибка регулирования Δx. Она подается на вход регулятора, который вырабатывает регулирующее воздействие μ, в зависимости от величины отклонения Δx.

По словам математика Р. Калмана: «Идея обратной связи в широком смысле является великим открытием и составляет основу всей автоматики».

Реакция системы на изменение задающего воздействия $x_{вх}$ представлена на рис. 1.8. На рис. 1.9 изображена реакция системы на изменение возмущающего воздействия f.

1) Пусть $x_{вх}= var, f= const,$ тогда система реагирует следующим образом.

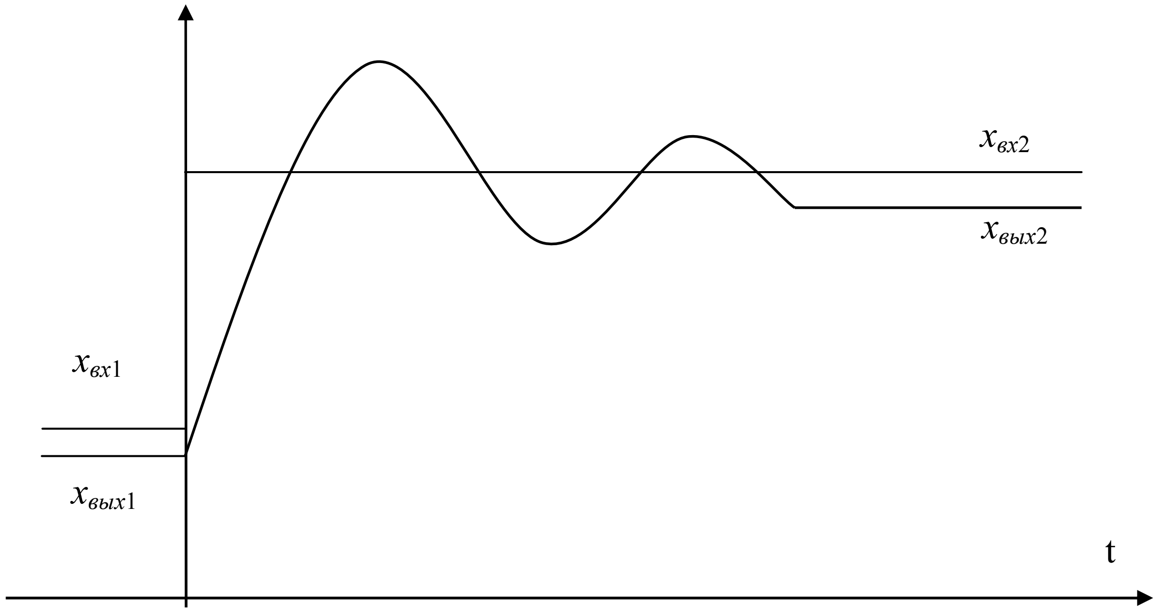

Рис. 1.8

2) $x_{вх}= const; \ f= var$

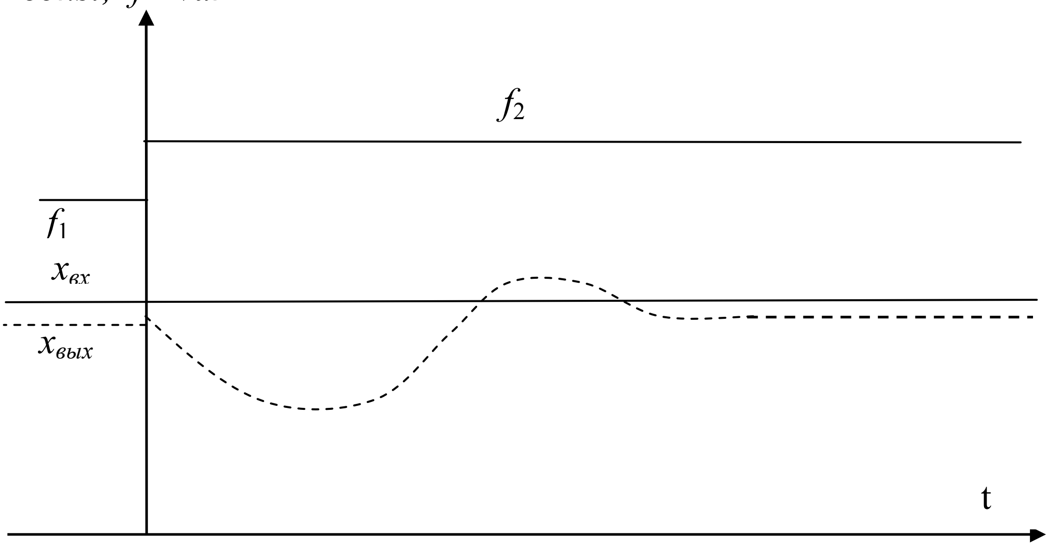

Рис. 1.9

Регулирование по возмущению

Система в этом случае является разомкнутой и ее функциональная схема имеет вид

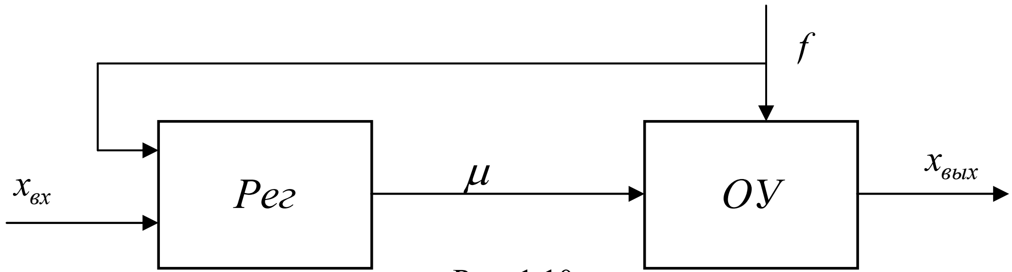

Рис. 1.10

В системе возмущающее воздействие измеряется и подается на вход регулятора. Регулирующее воздействие вырабатывается с учетом величины возмущения. Главная обратная связь отсутствует, и значение регулируемой величины не поступает на регулятор. Особенности системы: высокое быстродействие, но встречаются трудности по ее реализации, так как очень часто трудно измерить возмущение *f*.

Рассмотрим систему регулирования отопления здания (рис. 1.11)

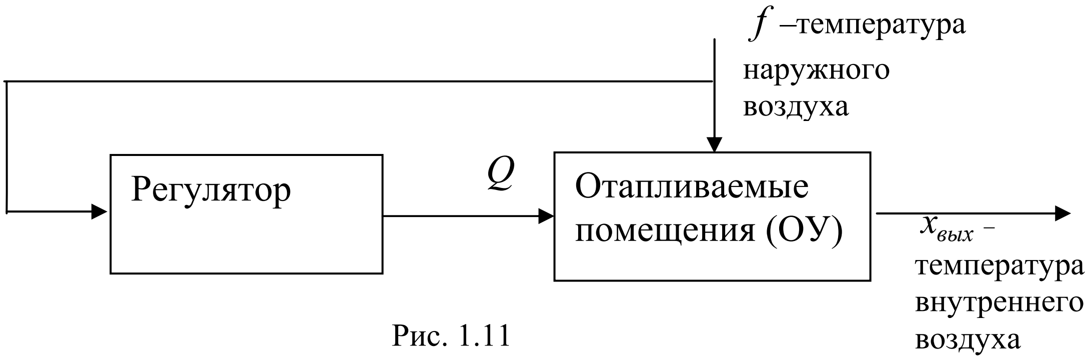

Рис. 1.11

Комбинированный принцип

Используется принцип регулирования по отклонению, а также сигнал от возмущающего воздействия.

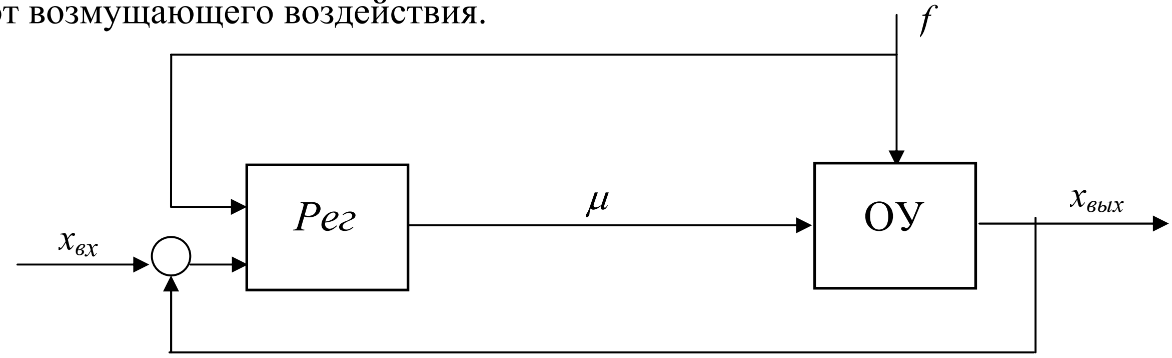

Рис. 1.12

Эта система обеспечивает высокое качество регулирования и широко распространена.

1.5. Понятие о линейных и нелинейных системах

Линейная система автоматического управления описывается линейными дифференциальными уравнениями. Статические характеристики элементов такой системы имеют следующий вид (рис. 1.14).

Рис. 1.13

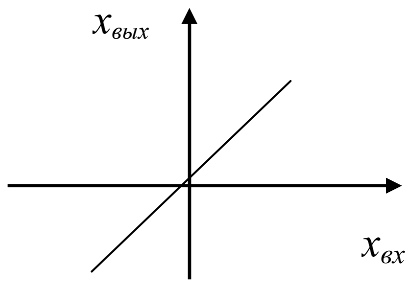

Рис. 1.14

Если на вход элемента поданы в отдельности входные воздействия $x_{вх1}$, $x_{вх2},\ldots, x_{вх\,n}$, то на выходе появятся сигналы $x_{вых1}$, $x_{вых2},\ldots, x_{вых\,n}$.

Если на вход элемента подается сигнал $x_{вх} = x_{вх1}+ x_{вх2} +\ldots+ x_{вх\,n}$, то на выходе линейного элемента и системы будет выходной сигнал $x_{вых} = x_{вых\,1} + +x_{вых2} +\ldots+ x_{вых\,n}$.

Это свойство называется *принципом суперпозиции* или наложения. Оно является очень важным и на его основе разработана теория линейных систем автоматического управления любой сложности.

Реальные звенья имеют характеристики линейные только на некотором участке (рис. 1.15).

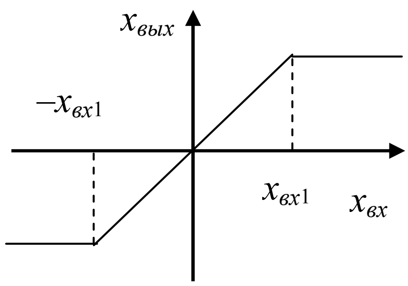

Рис. 1.15

Однако если выполняется условие $-x_{вх1}< x_{вх}< x_{вх1}$, то система называется условно линейной.

Нелинейные системы автоматического управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями и включают в себя звенья с существенно нелинейными характеристиками.
Например, система может содержать звено типа «идеальное реле», характеристика которого приведена на рис. 1.16.

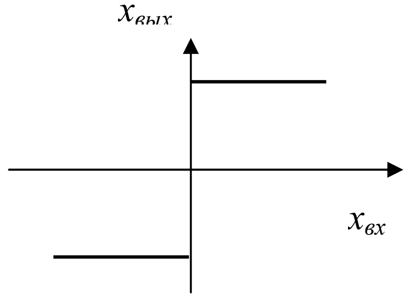

Рис. 1.16

К нелинейным системам принцип суперпозиции неприменим.

2. МЕТОДЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Линеаризация статических характеристик звеньев

Статическая характеристика звена описывает соотношение между входной и выходной величинами в статике (установившемся режиме). Статические характеристики могут быть заданы графически и аналитически. При наличии статических характеристик звеньев можно построить статические характеристики группы звеньев, а также характеристики всей системы.

Замена реальных нелинейных характеристик линейными называется *линеаризацией.*

Пусть имеем нелинейное звено (рис. 1.17).

Рис. 1.17

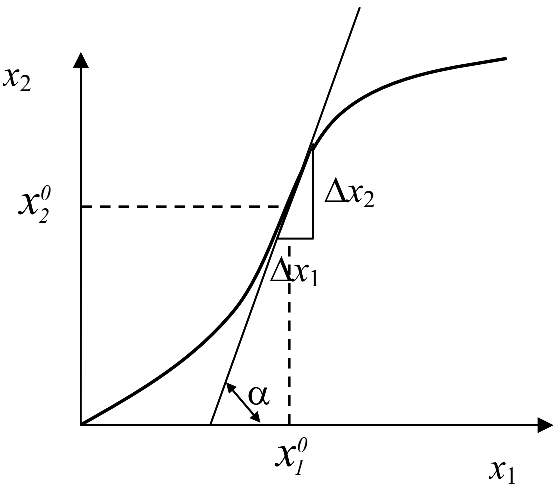

Рис. 1.18

Статическая характеристика звена описывается функцией $x_2 = F(x_1)$ и изображена на рис. 1.18. Допустим, x_2^0 соответствует установившемуся режиму работы, тогда справедливо

$$x_2^o = F(x_1^o)\,. \tag{2.1}$$

Если функция в окрестности $x^0{}_1$ непрерывна и дифференцируема, то ее можно разложить в ряд Тейлора

$$x_2 = F(x_1^0) + \left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 \cdot \left(x_1 - x_1^0\right) + \left(\frac{d^2F}{dx_1^{\,2}}\right)_0 \cdot \left(x_1 - x_1^0\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{d^nF}{dx_1^{\,n}}\right)_0 \cdot \left(x_1 - x_1^0\right)^n \cdot \frac{1}{n!} + \ldots \tag{2.2}$$

Через $\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0$ обозначена величина, взятая при $x_1 = x_1^0$.

Обычно считают, что члены высшего порядка малости много меньше двух первых слагаемых, потому ими пренебрегают

$$x_2 = F(x_1^0) + \left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 \cdot \left(x_1 - x_1^0\right) \tag{2.3}$$

Вычтем из (2.3) уравнение (2.1) почленно и получим

$$\left.\begin{aligned} & x_2 - x_2^0 = \left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 \cdot \left(x_1 - x_1^0\right) \text{ или} \\ & \Delta x_2 = k \cdot \Delta x_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

где $k = \left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 = tg\alpha$.

Уравнение (2.4) называется уравнением в *отклонениях* и соответствует статике звена.

Практически линеаризацию проводят чаще всего путем проведения касательной в точке установившегося режима и определяют $k = tg\alpha$, особенно в тех случаях, когда $F(x_1)$ не имеет аналитического выражения.

2.2. Линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений.

Чаще всего процессы в звеньях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим процесс линеаризации на примере дифференциального уравнения второго порядка

$$F\left(x_2, x_2', x_2'', x_1, x_1'\right) = 0, \tag{2.5}$$

где x_1 – входная величина, x_2 – выходная величина, $x_2' = \frac{dx_2}{dt}$, $x_1' = \frac{dx_1}{dt}$.

Пусть в установившемся режиме звена справедливо

$x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_1' = x_2' = x_2'' = 0$.

Тогда уравнение установившегося режима примет вид

$$F\left(x_2^0, 0, 0, x_1^0, 0\right) = 0. \tag{2.6}$$

Разложим (2.5) в ряд Тейлора в точке установившегося режима, рассматривая (2.5) как функцию от независимых переменных, $x_2, x_2', x_2'', x_1, x_1'$,

$$F\left(x_2^0, 0, 0, x_1^0, 0\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)_0 \cdot \Delta x_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)_0 \cdot \Delta x_2'' + $$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)_0 \cdot \Delta x_1' + Q = 0 \qquad (2.7)$$

где Q – высшие члены малости, $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta x_2' = x_2'$.

Вычтем из (2.7) уравнение (2.6) и положим $Q = 0$, тогда получим уравнение в отклонениях:

$$c_2 \cdot \Delta x_2'' + c_1 \cdot \Delta x_2' + c_0 \cdot \Delta x_2 = b_1 \cdot \Delta x_1' + b_0 \cdot \Delta x_1' \qquad (2.8)$$

где

$$c_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)_0, \; c_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)_0, \; c_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0, \; b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)_0, \; b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0.$$

Уравнение (2.8) описывает тот же процесс, что и (2.5), но имеет отличия:

- Уравнение (2.8) является линейным относительно переменных Δx_2 и Δx_1;
- Вместо x_2 и x_1 присутствуют отклонения Δx_2 и Δx_1 от установившегося значения;
- Уравнение (2.8) является приближенным.

2.3. Безразмерная форма записи уравнений

Введем относительные переменные:

$$\frac{\Delta x_2}{x_2^0} = \sigma \;, \; \frac{\Delta x_1}{x_1^0} = \varphi \qquad (2.9)$$

Подставим (2.9) в (2.8)

$$c_2 \cdot x_2^0 \cdot y'' + c_1 \cdot x_2^0 \cdot y' + c_0 \cdot x_2^0 \cdot y = b_1 \cdot x_1^0 \cdot \varphi' + b_0 \cdot x_1^0 \cdot \varphi \qquad (2.10)$$

Разделим (2.10) на $c_0 \cdot x_2^0$ и получим с учетом новых обозначений:

$$\left(T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1\right) \cdot \sigma = \left(K_2 \cdot p + K_1\right) \cdot \varphi \qquad (2.11)$$

$$T_2^{\,2} = \frac{c_2}{c_0}, \quad T_1 = \frac{c_1}{c_0}, \quad K_2 = \frac{b_1 \cdot x_1^{\,0}}{c_0 \cdot x_2^{\,0}}, \quad K_1 = \frac{b_0 \cdot x_1^{\,0}}{c_0 \cdot x_2^{\,0}}, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Уравнение (2.11) можно преобразовать

$$(T_2^{\,2} \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1) \cdot \sigma = K_1 \cdot (T_3 \cdot p + 1) \cdot \varphi \tag{2.12}$$

где $T_3 = \dfrac{K_2}{K_1}$,

T_i – постоянная времени звена, [с],

K_1 – коэффициент усиления (безразмерный).

Решая уравнение (2.12) как линейное, можно получить закон изменения выходной величины σ в функции времени $\sigma = \sigma(t)$.

Пример линеаризации звена.

Дана нелинейная функция $z = x \cdot y$, в статике $z_0 = x_0 \cdot y_0$

Образуем функцию $F = x \cdot y - z = 0$.

Разложим функцию в ряд Тейлора

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \cdot \Delta z = 0,$$

$$y_0 \cdot \Delta x + x_0 \cdot \Delta y - 1 \cdot \Delta z = 0.$$

Откуда получим уравнение в отклонениях

$$\Delta z = y_0 \cdot \Delta x + x_0 \cdot \Delta y.$$

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМЫ

Динамическое звено – это устройство любого вида и принципа действия, описываемое определенным дифференциальным уравнением. Свойства звена могут быть определены различными характеристиками: передаточной функцией, временными характеристиками и частотными характеристиками.

3.1. Передаточная функция звена

Пусть дано динамическое звено.

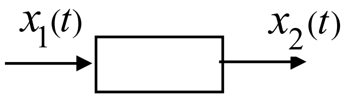

Рис. 3.1

Дифференциальное уравнение такого звена можно записать следующим образом:

$$a_0 \cdot \frac{d^n \cdot x_2}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} \cdot x_2}{dt^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{d^{n-2} \cdot x_2}{dt^{n-2}} + \ldots + a_n \cdot x_2 =$$
$$= b_0 \cdot \frac{d^m \cdot x_1}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m1} - x_1}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m \cdot x_1 \qquad (3.1)$$

Применим преобразование Лапласа, тогда уравнение (3.1) можно записать:

$$A_1(p) \cdot X_2(p) + A_2(p) = B_1(p) \cdot X_1(p) + B_2(p), \qquad (3.2)$$

Правила преобразования Лапласа для производных:

Если $f(t) = F(p)$, то

$$\begin{cases} \dfrac{df(t)}{dt} = p \cdot F(p) - f(0), \\ \dfrac{d^n(f(t))}{dt^n} = p^n \cdot F(p) - \left[p^{n-1} \cdot f(0) + p^{n-2} \cdot f(0) + \ldots + f^{n-1}(0) \right]. \end{cases}$$

Тогда в уравнении (3.2)

$$A_1(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$A_2(p) = \left(a_0 \cdot p^{n-1} + a_1 \cdot p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) \cdot x_2(0) - \left(a_0 \cdot p^{n-2} + a_1 \cdot p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) \cdot x_2{}'(0) -$$
$$- \ldots - a_0 \cdot x_2{}^{n-1}(0)$$

$$B_1(p) = b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \ldots + b_m,$$

$$B_2(p) = \left(b_0 \cdot p^{m-1} + b_1 \cdot p^{m-2} + \ldots + b_{m-1}\right) \cdot x_1(0) - \left(b_0 \cdot p^{m-2} + b_1 \cdot p^{m-3} + \ldots + b_{m-2}\right) \cdot x_1{}'(0) - \ldots$$
$$- b_0 \cdot x_1{}^{m-1}(0)$$

Из уравнения (3.2) выразим $X_2(p)$

$$X_2(p) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} \cdot X_1(p) + \frac{B_2(p) - A_2(p)}{A_1(p)} \qquad (3.3)$$

Первая составляющая представляет собой эффект действия входного сигнала на звено. Вторая составляющая учитывает начальные условия входной и выходной величин.

Пусть при $t = 0$ $\quad x_1 = x_1{}'(t) = x_1{}''(t) = \ldots = 0$,

$$x_2 = x_2{}'(t) = x_2{}''(t) = \ldots = 0.$$

Тогда $A_2(p) = 0$ и $B_2(p) = 0$, а значит уравнение (3.3) примет вид

$$X_2(p) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} \cdot X_1(p) \qquad (3.4)$$

или

$$\frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \ldots + a_n} = W(p) \qquad (3.5)$$

Выражение (3.5) называется *передаточной функцией* звена.

Таким образом, *передаточной функцией звена (или системы) называется отношение изображений выходной и входной величин при нулевых начальных условиях.*

С физической точки зрения $W(p)$ можно представить как динамический, т.е., переменный во времени коэффициент передачи звена.

Выражение (3.5) можно представить графически (рис. 3.2).

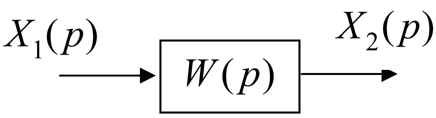

Рис. 3.2

3.2. Временные характеристики динамических звеньев

Динамические свойства звена могут быть определены по его переходной функции или по импульсной функции (функции веса).

Переходная функция h(t) представляет собой переходный процесс на выходе звена, возникающий при подаче на его вход ступенчатого воздействия типа *единичной ступенчатой функции.*

Если входное воздействие представляет собой неединичную ступенча-

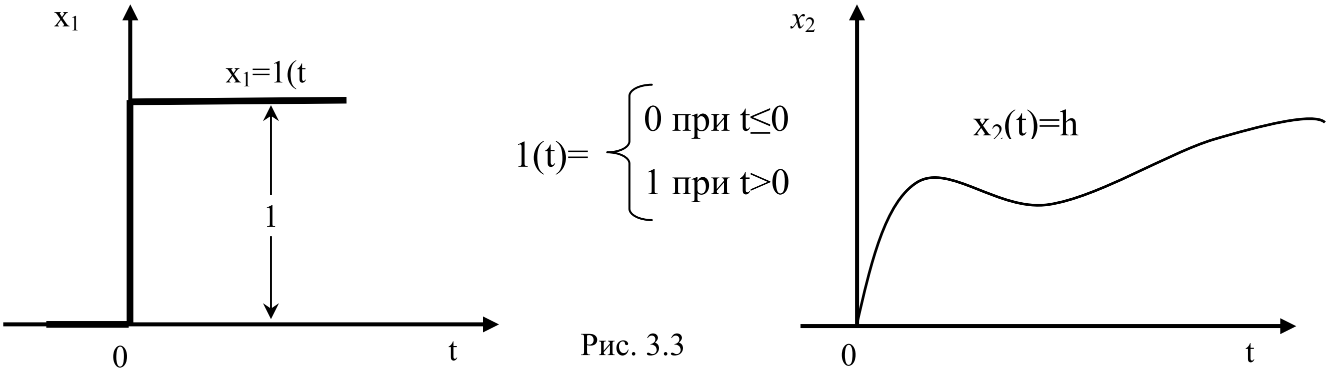

Рис. 3.3

тую функцию $x_1(t) = N \cdot 1(t)$, то выходная величина $x_2(t) = N \cdot h(t)$.

Ступенчатая функция часто встречается при анализе САУ. Примером функции $1(t)$ может служить: мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу двигателя, управляющие воздействия, подаваемые на вход системы оператором.

Функция веса w(t) представляет собой реакцию звена на *единичную импульсную функцию*, поданную на его вход.

Единичная импульсная функция, или *дельта-функция*, это производная от единичной ступенчатой функции $\delta(t) = 1'(t)$. Дельта-функция $\delta(t)$ равна нулю везде, кроме точки $t = 0$, где она стремится к бесконечности.

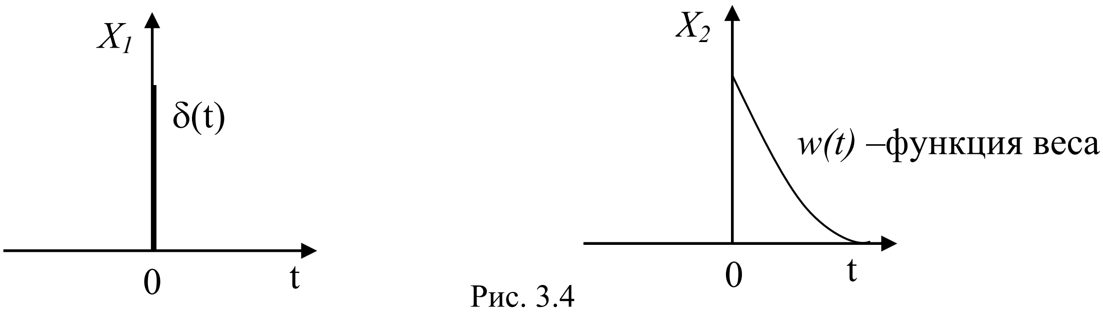

Рис. 3.4

Основное свойства δ(t): $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$, т.е. она имеет единичную площадь.

Пример δ(t). Кратковременный ток короткого замыкания в генераторе, кратковременная нагрузка на валу двигателя.

Связь между h(t) и w(t).

Воспользуемся дифференциальным уравнением звена в операторной форме

$$A(D) \cdot x_{вых}(t) = B(D) \cdot x_{вх}(t).$$

Пусть $x_{вх}(t)=1(t)$, тогда

$$A(D)\cdot h(t)=B(D)\cdot 1(t)\ . \tag{3.6}$$

Продифференцируем (3.6) по *t* и получим

$A(D)\cdot h'(t)=B(D)\cdot\delta(t)$, но так как

$A(D)\cdot w(t)=B(D)\cdot\delta(t)$, то следует, что

$w(t)=h'(t).$

Таким образом, уравнение связи имеет вид

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt} \quad \text{или} \tag{3.7}$$

$$h(t)=\int_0^t w(\tau)d\tau\ .$$

Связь весовой функции с передаточной функцией звена

Для звена справедливо:

$$X_2(p)=W(p)\cdot X_1(p)$$

Пусть $x_1(t)=\delta(t)$,тогда $x_2(t)=\varpi(t)$.

Найдем изображения входной и выходной величин:

$$X_1(p)=\delta(p)=1\ ,X_2(p)=\varpi(p)=W(p)\cdot 1.$$

Откуда следует, что

$$\varpi(t)\div W(p).$$

Таким образом, $\varpi(t)$ *и* $W(p)$ связаны с помощью прямого преобразования Лапласа

$$W(p)=\int_0^\infty \varpi(t)e^{-pt}dt\ .$$

$W(p)=p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt$ - связь переходной и передаточной функций.

Если входное воздействие $x_1(t)$ произвольно то $X_2(p)=W(p)*X_1(p)$ и на основании теоремы свертки

$$x_2(t)=\int_0^t \varpi(t)*x_1(t-\tau)d\tau\ ,$$

где τ - вспомогательное время интегрирования, изменяющееся в пределах от 0 до рассматриваемого текущего времени t_0.

3.3. Частотные характеристики звеньев

Переходные характеристики дают сведения о поведении системы в переходных режимах. Для оценки установившихся режимов более удобно рассматривать поведение систем при воздействиях, являющихся периодическими функциями времени. Выбор гармонических воздействий обусловлен следующими причинами:

- реальные воздействия можно разложить в ряды Фурье,
- гармонические воздействия можно легко получить в эксперименте.

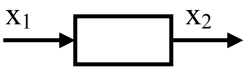

Рис. 3.5

Пусть на вход звена (рис. 3.5) подано гармоническое воздействие $x_1 = X_1 \cos\omega t$, где X_1 – амплитуда, ω - угловая частота.

Тогда на выходе появится также гармонические колебания, имеющие ту же частоту, но в общем случае сдвинутые по фазе относительно входной величины на угол φ, то есть $x_2 = X_2 \cos(\omega t + \varphi)$.

Представим x_1 и x_2 в *символической* форме

$$x_1 = X_1 e^{j\omega t} \tag{3.8}$$

$$x_2 = X_2 e^{j(\omega t + \varphi)} \tag{3.9}$$

(В символической форме $\cos\omega t = e^{j\omega t}$, вместо точного значения $x_1 = \frac{X_1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = x_1' + x_2''$ - на основании формулы Эйлера).

Чтобы выяснить соотношение между x_1 и x_2 воспользуемся дифференциальным уравнением звена

$$a_0 \frac{d^n x_2}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x_2 = b_0 \frac{d^m x_1}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m x_1 \tag{3.10}$$

Продифференцируем (3.8) и (3.9) по t и подставим в (3.10)

$$\frac{dx_2}{dt} = X_2 j\omega e^{j(\omega t + \varphi)};$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = X_2 (j\omega)^2 e^{j(\omega t + \varphi)}, \ldots, \frac{d^n x_2}{dt^n} = X_2 (j\omega)^n e^{j(\omega t + \varphi)};$$

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1 j\omega e^{j\omega t};$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 (j\omega)^2 e^{j\omega t}, \ldots, \frac{d^m x_1}{dt^m} = X_1 (j\omega)^m e^{j\omega t}.$$

$$\begin{gathered} [a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n] X_2 e^{j(\omega t + \varphi)} = \\ = [b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m] X_1 e^{j\omega t} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Из (3.11) получим

$$\frac{X_2}{X_1} e^{j\varphi} = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} = W(j\omega). \tag{3.12}$$

$W(j\omega)$ *– это комплексное число, модуль которого равен отношению амплитуды выходной величины к амплитуде входной, а аргумент сдвигу фаз входной и выходной величин*

$$\operatorname{mod} W(j\omega) = |W(j\omega)| = \frac{X_2}{X_1}; \qquad \arg W(j\omega) = \varphi.$$

Если в *W(p)* вместо *p* подставить $j\omega$, то формально можно получить частотную передаточную функцию.

Выражение (3.12) можно представить

$$W(j\omega) = \frac{A + jB}{C + jD} = \frac{(A + jB)}{(C + jD)} \times \frac{(C - jD)}{(C - jD)} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j\frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = U(\omega) + jV,$$

где $U(\omega)$ – вещественная составляющая частотной функции;

$V(\omega)$ – мнимая составляющая частотной функции.

Можно представить $W(j\omega)$ и в другой форме, а именно:

$$W(j\omega) == A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где $\left|W(j\omega)\right| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = A(\omega)$ – модуль частотной передаточной функции,

$\varphi(\omega) = arctg\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}$ – фаза частотной передаточной функции.

Для наглядного представления частотных свойств звена применяются так называемые частотные характеристики.

3.3.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Строится на комплексной плоскости. Представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞.

Пример. Пусть дана частотная передаточная функция $W(j\omega) = \dfrac{1}{Tj\omega + 1}$

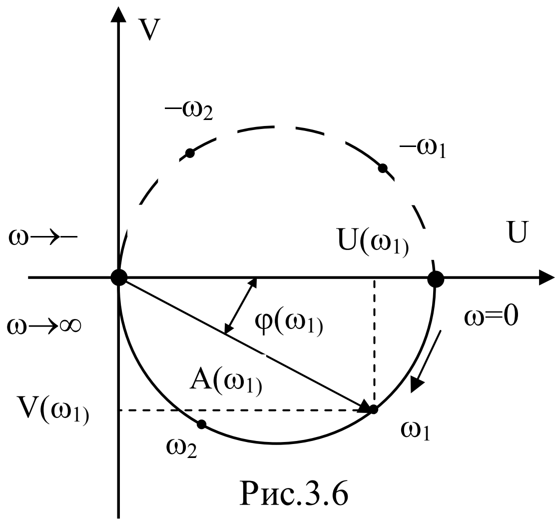

Рис.3.6

Основные свойства:

1) Число квадрантов, где проходит АФХ не выше, чем порядок дифференциального уравнения;
2) АФХ, построенные при изменении ω от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$, симметричны.
3) Можно построить зависимости модуля и фазы от частоты (рис. 3.7).

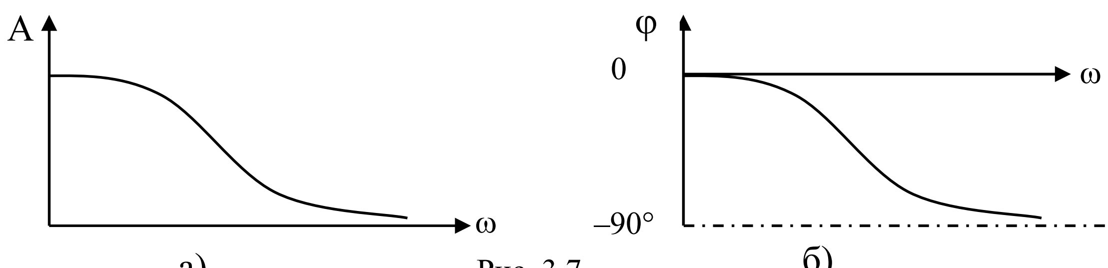

Рис. 3.7

3.3.2. Логарифмические частотные характеристики

Пусть задана частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)} \qquad (3.13)$$

Прологарифмируем (3.13)

$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega)$,

то есть логарифм $W(j\omega)$ – это комплексное выражение, где действительная часть– *ln* модуля, а мнимая часть– фаза.

Для практических целей удобно пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАХ) и логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФХ).

Для построения ЛАХ находится величина

$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg A(\omega)$.

$L(\omega)$ – измеряется в децибелах [дБ].

Бел – это такое усиление, когда мощность увеличивается в 10 раз (1Б=10дБ)
2 Бела – усиление в 100 раз.
Крупные единицы: декабелы, гектобелы и т. д.
Мелкие единицы: децибелы, сантибелы и т. д.

Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды (например, $P \approx I^2$), то при усилении, равном 1Б, величина $\lg|W(j\omega)|^2 = 2\lg|W(j\omega)|$ равна 1, при усилении, равном 2Б, эта величина равна 2 и т. д.

Следовательно, усиление амплитуды в Б, численно равно $2\lg|W(j\omega)|$, а усиление в децибелах, численно равно $20\lg|W(j\omega)|$.

$$L(\omega) = 10\lg\frac{P_2}{P_1}[\partial Б] = 10\lg\frac{U_2^2}{U_1^2} = 20\lg\frac{U_2}{U_1}[\partial Б]$$

$$L(\omega) = \lg\frac{P_2}{P_1}[Б] = \lg\frac{U_2^2}{U_1^2} = 2\lg\frac{U_2}{U_1}[Б] = 20\lg\frac{U_2}{U_1}[\partial Б].$$

По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе, то есть наносятся отметки, соответствующие *lg*ω, а около них пишется само значение частоты ω, [рад/сек].

Единицами измерения ω являются октава и декада.

Декада – это интервал частот, заключенный между произвольным значением ω и 10ω.

$\lg 10\omega - \lg\omega = \lg 10 = 1$, то есть отрезок между ω и 10ω не зависит от абсолютного значения ω.

Октава – интервал частот, заключенный между произвольным значением ω и 2ω.

$\lg 2\omega - \lg\omega = \lg 2$, тоже не зависит от абсолютного значения ω.

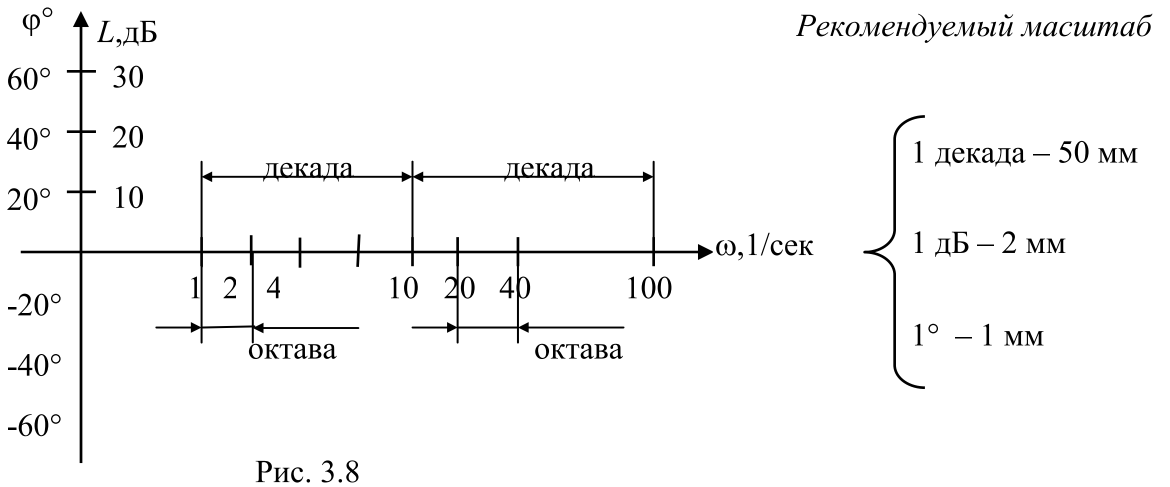

Рис. 3.8

Практически для нанесения логарифмического масштаба можно пользоваться выражением:

$$m_\omega[мм] = m_{дек}[мм] \cdot \lg\omega,$$

где: ω – угловая частота, $m_{дек}$ – длина декады в миллиметрах, m_ω–длина отрезка от начала декады до заданной частоты.

Достоинства логарифмического масштаба:

- Могут быть нанесены на график несоизмеримые значения амплитуды и частоты;
- ЛАЧХ являются прямолинейными;
- Основное достоинство ЛАЧХ в том, что их построение почти не требует вычислительной работы. Это особенно заметно, когда $W(j\omega)$ может быть представлена в виде произведения сомножителей.

$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)$;

$$W(j\omega) = A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot e^{j[\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)]},$$

то есть логарифмические частотные характеристики можно получить суммированием ординат отдельных ЛАХ.

$L(\omega) = 20\lg A_1(\omega) \cdot \lg A_2(\omega)$

$L(\omega) = 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega)$

$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$

Рассмотрим примеры:

1) Пусть $W(j\omega)=K_1$, тогда

$A(\omega)=K_1$ и $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K_1$

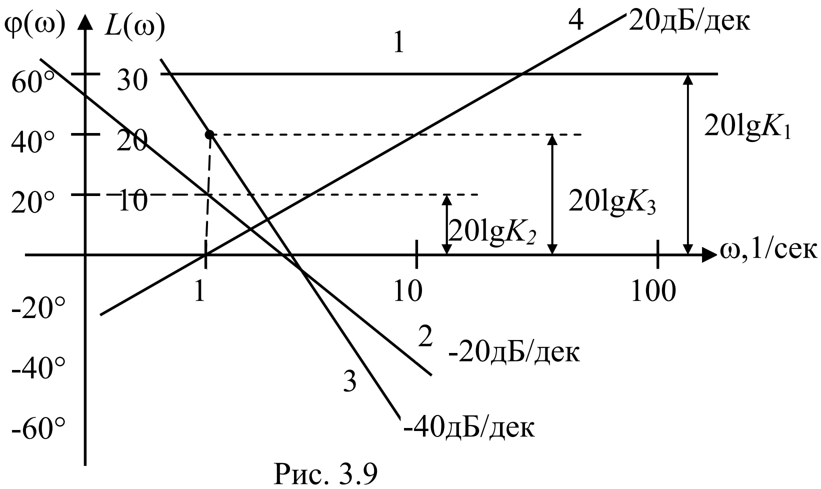

Рис. 3.9

2) $W(j\omega) = \dfrac{K_2}{j\omega}$; тогда

$A(\omega) = \dfrac{K_2}{\omega}$; $L(\omega) = 20\lg K_2 - 20\lg\omega$

если обозначить $\lg\omega = x$, то $L(\omega) = 20\lg K_2 - 20x$.

Пусть ω=1, тогда $L(\omega) = 20\lg K_2$.

Определим наклон прямой, для этого вычислим $L(\omega)$ при ω_1и $10\omega_1$

$L(10\omega_1) - L(\omega_1) = 20\lg K_2 - 20\lg 10\omega_1 - (20\lg K_2 - 20\lg\omega_1) = -20дБ$, то есть за одну декаду L(ω) уменьшится на 20дБ и наклон прямой составляет –20 дБ/дек.

3) $W(j\omega) = \dfrac{K_3}{(j\omega)^2}$

$A(\omega) = \dfrac{K_3}{\omega^2}$

$L(\omega) = 20\lg K_3 - 20\lg\omega^2 = 20\lg K_3 - 40\lg\omega$

L(ω) также имеет вид прямой с наклоном –40дБ/дек.

4) $W(j\omega) = K_4 j\omega$

$A(\omega) = K_4 \cdot \omega$

$$L(\omega) = 20\lg K_4 + 20\lg\omega$$

Это уравнение прямой с наклоном +20дБ/дек.

3.4. Понятие об устойчивых минимально-фазовых звеньях

Звено называется *устойчивым*, если при ступенчатом воздействии на входе звена, его выходная величина устанавливается на некотором определенном значении.

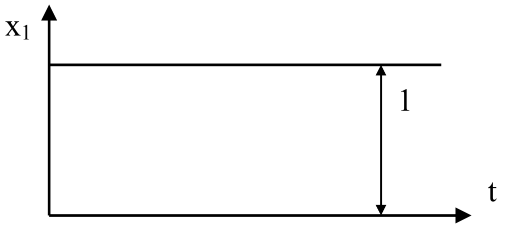

Рис. 3.10

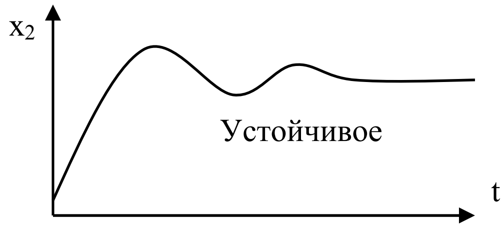

Рис. 3.11

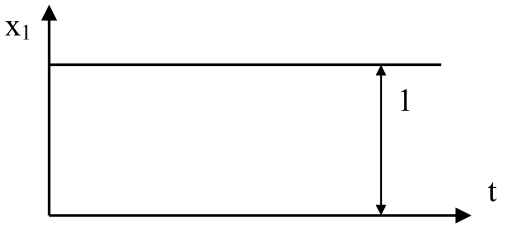

Рис. 3.12

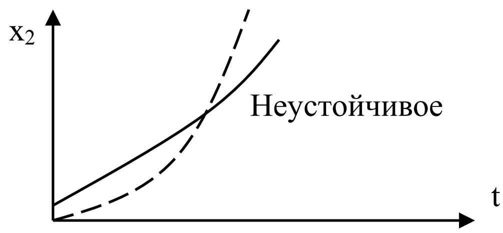

Рис. 3.13

Устойчивость можно определить по передаточной функции звена

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Передаточную функцию звена можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{b_0 \prod\limits_{j=1}^{m} (p - q_j)}{a_0 \prod\limits_{i=1}^{n} (p - r_i)},$$

где q_j – нули $W(p)$, которые являются корнями уравнения $B(p) = 0$,

r_i – полюсы $W(p)$ или корни уравнения $A(p) = 0$,

Π – знак произведения.

Устойчивость звена определяется корнями полиномов. Для устойчивых звеньев полюсы имеют отрицательные вещественные части, при этом свободная составляющая решения дифференциального уравнения содержит слагаемые типа $C_i \cdot e^{r_i \cdot t}$, которые стремятся к нулю.

Минимально-фазовые звенья имеют все нули и полюсы $W(p)$ с отрицательными вещественными частями. Название звеньев обусловлено тем, что этим звеньям присущи меньшие по абсолютной величине фазовые сдвиги по сравнению со звеньями, где это условие не выполняется.

Для этих звеньев справедливы зависимости:

$$U(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(\omega)}{u-\omega}du\,; \qquad V(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\omega)}{u-\omega}du\,;$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{8{,}7\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln A(u)}{u-\omega}du\,.$$

где u – переменная интегрирования. Эти выражения вытекают из преобразований Гильберта и имеют важное значение, так как дают однозначное соответствие между АЧХ и ФЧХ, а также АЧХ и $W(j\omega)$.